Studia i Materiały Informatyki Stosowanej, Tom 2, Nr 2, 2010
str. 55-58

SZYBKA DYSKRETNA TRANSFORMATA SINUSOWA

Robert Rychcicki

Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny
Wydział Informatyki
ul. Żołnierska 49, 71-210 Szczecin
e-mail: rrychcicki@wi.ps.pl

Streszczenie: *Celem pracy jest zaproponowanie szybkiej metody obliczeniowej pozwalającej na wyznaczenie DST-IV (oraz transformaty odwrotnej) o złożoności O(n*lgn) pod względem liczby mnożeń. Wybór DST-IV podyktowany jest brakiem atrakcyjnych zależności w macierzy opisującej przekształcenie – większość prac polskich i zagranicznych [1,2,3] opisujących efektywne metody konstrukcji grafów przebiegu obliczeń opiera się o DST-II/DST-III, których analiza jest prostsza. Opracowana metoda zostanie przedstawiona w postaci matematycznej.*

Słowa kluczowe: *Transformata sinusowa, transformata dyskretna, DST*

Fast Discrete Sine Transform

Abstarct: *The aim of this work is to present a fast calculation method for DST-IV and inverse transform, whose complexity is O(n*lgn) with regard to multiplication count. DST-IV was chosen due to lack of attractive dependencies in the matrix describing the transformation. Most works (both Polish and foreign [1,2,3]) elucidating effective methods of producing graphs describing the calculation process are based on DST-II/DST-III, whose analysis is by far less complicated. The proposed method will be presented in a mathematical form..*

Keywords: *Sine transform, discrete transform, DST*

1. WSTĘP

W popularnej literaturze [2,4] można znaleźć wiele opracowań dotyczących efektywnych i szybkich algorytmów obliczających szybką dyskretną transformatę Fouriera, przydatną w wielu zastosowaniach związanych z cyfrowym przetwarzaniem sygnałów.
Nieco mniej miejsca poświęcono na szybką dyskretną transformatę cosinusową – używaną m.in. w kompresji obrazu i dźwięku.
Natomiast bliźniacza do niej szybka dyskretna transformata sinusowa nie okazała się atrakcyjnym tematem dla wielu naukowców.
Dlaczego? Powodów można wymienić kilka – przydatna własność funkcji cosinus, jaką jest jej parzystość cos(-x)=cos(x), węższe spektrum zastosowań [3,5] dla transformaty sinusowej (np. steganografia), stosunkowa łatwość przekształcania baz transformat Fouriera, sinusowej i cosinusowej oraz nieskomplikowane zależności matematyczne łączące te transformaty.
DCT i DST różni się od DFT przyjętymi warunkami brzegowymi – wszystkie te transformaty operują na skończonym zestawie próbek, jednak przyjmują inne założenia odnośnie „rozszerzenia" funkcji poza ograniczoną dziedzinę. Tak jak przy DFT zakłada się okresowe rozszerzenie dziedziny, tak przy DST przyjmuje się parzystość funkcji, a przy DCT – nieparzystość. Daje to aż 16 przypadków transformat trygonometrycznych – zależnie od parzystości/nieparzystości na lewym i prawym krańcu dziedziny oraz punkty symetrii dla każdego z krańców (skrajna próbka może być przy rozszerzeniu dublowana bądź nie). DCT (parzystość na lewym krańcu dziedziny) to grupa 8 z tych transformat (w szczególności I, II, V, VI – zachowują ciągłość na obu krańcach dziedziny po jej rozszerzeniu), a DST – pozostałe 8. Zależnie od rodzaju

analizowanego sygnału [3] i oczekiwanych efektów, stosujemy odpowiednią transformatę.

2. MATEMATYCZNY OPIS DST

Istnieje kilka podstawowych typów DST. DST-IV dana jest wzorem:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \sin\left[\frac{\pi}{N}\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(k+\frac{1}{2}\right)\right] \qquad k=0,\dots,N-1$$

W podobny sposób opisana jest bliźniacza transformata DCT-IV:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left[\frac{\pi}{N}\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(k+\frac{1}{2}\right)\right] \qquad k=0,\dots,N-1$$

Transformatę można również opisać za pomocą iloczynu wektorowo-macierzowego:

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sin(\frac{\pi}{4n}) & \cdots & sin(2n-1\frac{\pi}{4n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ sin(2n-1\frac{\pi}{4n}) & \cdots & -sin(\frac{\pi}{4n}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_{n-1} \end{bmatrix} = DST_n \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix},$$

gdzie macierz DST_n składa się z czynników

$$S_{k,n}^{N} = \sin\left[\frac{2\pi}{8N}(2n+1)(2k+1)\right]$$

$$k=0,\cdots,N-1 \qquad n=0,\cdots,N-1$$

W rozważanym przypadku 8-punktowego DST-IV:

$DST_8 =$

sin (1π/32)	sin (3π/32)	sin (5π/32)	sin (7π/32)	sin (9π/32)	sin (11π/32)	sin (13π/32)	sin (15π/32)
sin (3π/32)	sin (9π/32)	sin (15π/32)	sin (11π/32)	sin (5π/32)	-sin (1π/32)	-sin (7π/32)	-sin (13π/32)
sin (5π/32)	sin (15π/32)	sin (7π/32)	-sin (3π/32)	-sin (13π/32)	-sin (9π/32)	sin (1π/32)	sin (11π/32)
sin (7π/32)	sin (11π/32)	-sin (3π/32)	-sin (15π/32)	-sin (1π/32)	sin (13π/32)	sin (5π/32)	-sin (9π/32)
sin (9π/32)	sin (5π/32)	-sin (13π/32)	-sin (1π/32)	sin (15π/32)	-sin (3π/32)	-sin (11π/32)	sin (7π/32)
sin (11π/32)	-sin (1π/32)	-sin (9π/32)	sin (13π/32)	-sin (3π/32)	-sin (7π/32)	sin (15π/32)	-sin (5π/32)
sin (13π/32)	-sin (7π/32)	sin (1π/32)	sin (5π/32)	-sin (11π/32)	sin (15π/32)	-sin (9π/32)	sin (3π/32)
sin (15π/32)	-sin (13π/32)	sin (11π/32)	-sin (9π/32)	sin (7π/32)	-sin (5π/32)	sin (3π/32)	-sin (1π/32)

Tabela 1 Macierz opisująca transformatę DST(8).

3. DZIEL I ZWYCIĘŻAJ – OPIS MATEMATYCZNY METODY

Analiza macierzy definiującej przekształcenie DST-IV pozwala na wykorzystanie metody „dziel i zwyciężaj" podobnej do użycia „decymacji" przy obliczaniu FFT algorytmem Cooley-Tukey.

Macierz DST_8 z zaznaczonymi omawianymi fragmentami:

$DST_8 =$

sin (1π/32)	sin (3π/32)	sin (5π/32)	sin (7π/32)	sin (9π/32)	sin (11π/32)	sin (13π/32)	sin (15π/32)
sin (3π/32)	sin (9π/32)	sin (15π/32)	sin (11π/32)	sin (5π/32)	-sin (1π/32)	-sin (7π/32)	-sin (13π/32)
sin (5π/32)	sin (15π/32)	sin (7π/32)	-sin (3π/32)	-sin (13π/32)	-sin (9π/32)	sin (1π/32)	sin (11π/32)
sin (7π/32)	sin (11π/32)	-sin (3π/32)	-sin (15π/32)	-sin (1π/32)	sin (13π/32)	sin (5π/32)	-sin (9π/32)
sin (9π/32)	sin (5π/32)	-sin (13π/32)	-sin (1π/32)	sin (15π/32)	-sin (3π/32)	-sin (11π/32)	sin (7π/32)
sin (11π/32)	-sin (1π/32)	-sin (9π/32)	sin (13π/32)	-sin (3π/32)	-sin (7π/32)	sin (15π/32)	-sin (5π/32)
sin (13π/32)	-sin (7π/32)	sin (1π/32)	sin (5π/32)	-sin (11π/32)	sin (15π/32)	-sin (9π/32)	sin (3π/32)
sin (15π/32)	-sin (13π/32)	sin (11π/32)	-sin (9π/32)	sin (7π/32)	-sin (5π/32)	sin (3π/32)	-sin (1π/32)

Tabela 2 Zależności w transformacie DST(8).

Porównanie z macierzą DST_4:

$DST_4 =$

sin(2π/32)	sin(3π/16)	sin(5π/16)	sin(7π/16)
sin(3π/16)	sin(7π/16)	sin(1π/16)	-sin(5π/16)
sin(5π/16)	sin(1π/16)	-sin(7π/16)	sin(3π/16)
sin(7π/16)	-sin(5π/16)	sin(3π/16)	-sin(1π/16)

Tabela 3 Zależności w transformacie DST(4).

Argumenty funkcji sinus dla DST_8 odpowiadają argumentom w $DST_4 \pm \pi/32$. Nie jest to przypadek. Powracając do wzoru definiującego DST:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \sin\left[\frac{2\pi}{8N}(2n+1)(2k+1)\right] \qquad k=0,\cdots,N-1$$

poszczególne komórki macierzy dane są wzorem

$$S_{k,n}^{N} = \sin\left[\frac{2\pi}{8N}(2n+1)(2k+1)\right]$$

$$k=0,\cdots,N-1 \qquad n=0,\cdots,N-1$$

Po porównaniu wartości poszczególnych komórek macierzy dla DST o rozmiarze $2N$ i N uzyskujemy:

$$X_k^{2N} = \sum_{n=0}^{2N-1} x_n S_{k,n}^{2N} \qquad k=0,\cdots,2N-1$$

Porównując to z odpowiednimi komórkami macierzy dla DST z 2N próbek otrzymamy:

$$S_{k,n}^{N} = \sin\left[\frac{2\pi}{8N}(2n+1)(2k+1)\right]$$

$$k = 0, \cdots, N-1 \qquad n = 0, \cdots, N-1$$

$$S_{k,2n}^{2N} = \sin\left[\frac{\pi}{8N}(4n+1)(2k+1)\right]$$

$$S_{k,2n}^{2N} = \sin\left[\frac{\pi}{8N}(4n+2)(2k+1) - \frac{\pi}{8N}(2k+1)\right]$$

Ponieważ:

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$

uzyskujemy

$$S_{k,2n}^{2N} = \sin\left[\frac{2\pi}{8N}(2n+1)(2k+1)\right]\cos\left[\frac{(2k+1)\pi}{8N}\right] -$$

$$-\cos\left[\frac{2\pi}{8N}(2n+1)(2k+1)\right]\sin\left[\frac{(2k+1)\pi}{8N}\right]$$

Wprowadzając oznaczenie

$$C_{k,n}^{N} = \cos\left[\frac{2\pi}{8N}(2n+1)(2k+1)\right]$$

$$k = 0, \cdots, N-1 \qquad n = 0, \cdots, N-1$$

uzyskujemy

$$S_{k,2n}^{2N} = S_{k,n}^{N}\cos\left[\frac{(2k+1)\pi}{8N}\right] - C_{k,n}^{N}\sin\left[\frac{(2k+1)\pi}{8N}\right]$$

Analogicznie:

$$S_{k,2n+1}^{2N} = \sin\left[\frac{\pi}{8N}(4n+2)(2k+1) + \frac{\pi}{8N}(2k+1)\right]$$

$$S_{k,2n+1}^{2N} = S_{k,n}^{N}\cos\left[\frac{(2k+1)\pi}{8N}\right] + C_{k,n}^{N}\sin\left[\frac{(2k+1)\pi}{8N}\right]$$

Bardzo podobną zależność można znaleźć dla pozostałych współczynników wykorzystując fakt, że:

$$X_{2N-1-k}^{2N} = \sum_{n=0}^{2N-1} x_n(-1)^n C_{k,n}^{2N} \qquad k = 0, \cdots, N-1$$

,

wykonując analogiczne do poprzednich przekształcenia uzyskujemy natychmiast:

$$C_{k,2n}^{2N} = C_{k,n}^{N}\cos\left[\frac{(2k+1)\pi}{8N}\right] + S_{k,n}^{N}\sin\left[\frac{(2k+1)\pi}{8N}\right]$$

$$C_{k,2n+1}^{2N} = C_{k,n}^{N}\cos\left[\frac{(2k+1)\pi}{8N}\right] - S_{k,n}^{N}\sin\left[\frac{(2k+1)\pi}{8N}\right].$$

Obliczenie DST zostało zatem sprowadzone do obliczenia dwukrotnie mniejszego DST dla próbek będących sumami kolejnych par próbek oryginalnych oraz DCT dla kolejnych różnic par próbek.

$$X_{k}^{2N} = \sum_{n=0}^{N-1}\left[(x_{2n} + x_{2n+1})\, S_{k,n}^{N}\cos\left[\frac{(2k+1)\pi}{8N}\right] - \right.$$

$$\left. - (x_{2n} - x_{2n+1})\, C_{k,n}^{N}\sin\left[\frac{(2k+1)\pi}{8N}\right]\right]$$

$$X_{2N-1-k}^{2N} = \sum_{n=0}^{N-1}\left[(x_{2n} - x_{2n+1})\, C_{k,n}^{N}\cos\left[\frac{(2k+1)\pi}{8N}\right] + \right.$$

$$\left. + (x_{2n} + x_{2n+1})\, S_{k,n}^{N}\sin\left[\frac{(2k+1)\pi}{8N}\right]\right]$$

Z założenia, DCT (różnicy kolejnych par próbek $X^{(-)}$) liczymy jednym ze znanych szybkich algorytmów, a DST (sumy kolejnych par próbek $X^{(+)}$) dekomponujemy rekurencyjnie w ten sam sposób.

$$X_{k}^{2N} = X^{(+)}{}_{k}^{N}\cos\left[\frac{(2k+1)\pi}{8N}\right] - X^{(-)}{}_{k}^{N}\sin\left[\frac{(2k+1)\pi}{8N}\right]$$

$$X_{2N-1-k}^{2N} = X^{(-)}{}_{k}^{N}\cos\left[\frac{(2k+1)\pi}{8N}\right] + X^{(+)}{}_{k}^{N}\sin\left[\frac{(2k+1)\pi}{8N}\right]$$

Należy ustalić jeszcze warunek brzegowy rekurencji, np. dla danych o rozmiarze N=1 lub N=2.

$$\mathbf{DST_2} = \begin{vmatrix} \sin(1\pi/8) & \sin(3\pi/8) \\ \sin(3\pi/8) & -\sin(1\pi/8) \end{vmatrix} \qquad \mathbf{DCT_2} = \begin{vmatrix} \cos(1\pi/8) & \cos(3\pi/8) \\ \cos(3\pi/8) & -\cos(1\pi/8) \end{vmatrix}$$

Tabela 4 Warunek brzegowy dla propozycji DST-IV.

4. ZŁOŻONOŚĆ OBLICZENIOWA

Analiza złożoności obliczeniowej pod kątem ilości wykonanych mnożeń (rzeczywistych) przedstawionego algorytmu nie jest trudna – załóżmy, że DCT nie wymaga więcej mnożeń niż DST dla takiego samego rozmiaru danych (co zostało pokazane przy sprowadzanie DST do DCT).

$DST_{(N=2)}$ wymaga 3 mnożeń.
$DST_{(N=4)}$ składa się z $DST_{(N=2)}$, $DCT_{(N=2)}$ i ich łączenia zrealizowanego tymczasowo (nieoptymalnie) przy użyciu 8 mnożeń. Łącznie zostanie więc wykonanych 14 mnożeń.
$DST_{(N=8)}$ składa się z $DST_{(N=4)}$, $DCT_{(N=4)}$ i łączenia - zostaną wykonane 44 mnożenia.
$DST_{(N=16)}$ składa się z $DST_{(N=8)}$, $DCT_{(N=8)}$ i łączenia - Łącznie zostanie wykonanych 120 mnożeń.

Kontynuując obliczenia uzyskujemy następujące wyniki:

N	**MW(N)**	**MP(N)**	***MO(N)***
2	4	3	*3*
4	16	14	*14*
8	64	44	*39*
16	256	120	*82*
32	1 024	304	*176*
64	4 096	736	*380*
128	16 384	1 728	*820*
256	65 536	3 968	*1 764*
512	262 144	8 960	*3 780*
1024	1 048 576	19 968	*8 068*
2048	4 194 304	44 032	*17 156*
4096	16 777 216	96 256	*36 356*
8192	67 108 864	208 896	*76 804*

Tabela 5 Złożoność obliczeniowa.

Tabela zawiera dane: MW(N) - Liczba mnożeń przy użyciu iloczynu macierzowo-wektorowego, MP(N) - Pesymistyczna liczba mnożeń w proponowa–nej metodzie, MO(N) - Oczekiwana liczba mnożeń w propono–wanej metodzie

Wartości oczekiwane podano przy założeniu, że zastosujemy bardziej efektywne algorytmy obliczania DCT-IV – liczba ta ulegnie zmianie w zależności od wyboru metody.

5. WŁASNOŚCI ALGORYTMU

Zaproponowana metoda ma duże zalety:

- Działa dla dowolnego rozmiaru danych $N=2^C$ oraz innych rozmiarów, gdy dane wejściowe dopełni się zerami,
- Jej pesymistyczna złożoność obliczeniowa to *O(n*lgn)*, zarówno pod względem mnożeń, jak i dodawań, spełnia więc wymagania wystarczające, aby nadać jej status „szybkiego algorytmu” w tej klasie zadań,
- Na każdym z poziomów rekurencji można zastosować gotowy, opracowany moduł realizujący szybką transformatę dla określonego rozmiaru danych wejściowych, co dodatkowo zmniejszy liczbę operacji matematycznych,
- Możliwość stosowania różnych metod obliczeniowych na każdym z poziomów rekurencji,

Jest podatna na dalsze optymalizacje, ponieważ graf opisujący przeprowadzane obliczenia może zostać łatwo uproszczony

Literatura

1. Xuancheng Shao, Steven G. Johnson.
   Type-II/III DCT/DST algorithms with reduced number of arithmetic operations. 2008.
   Signal Processing Volume 88 , Issue 6 (June 2008), pp 1553-1564, ISSN:0165-1684
2. Markus Päuschel, José M. F. Mouray. The algebraic approach to the discrete cosine and sine transforms and their fast algorithms.
   SIAM Journal of Computing 2003, Vol. 32, No. 5, pp. 1280-1316
3. Vladimir Britanak, Patrick C. Yip, K. R Rao,
   Discrete Cosine and Sine Transforms: General Properties, Fast Algorithms and Integer Approximations
   ISBN-13: 978-0123736246, Academic Press (2006);
4. Wolfram Research
   http://documents.wolfram.com/applications/wavelet/FundamentalsofWavelets/1.7.2.html
   (październik 2007)
5. Ross J. Anderson, Fabien A.P. Petitcolas, On The Limits of Steganography
   IEEE Journal of Selected Areas in Communications, 16(4):474-481, Maj 1998.
   Special Issue on Copyright & Privacy Protection.
   ISSN 0733-8716.